理想化陽解法 FEM を用いた溶接座屈変形解析

大阪府立大学大学院 〇前田

生島 一樹 柴原 正和

新太郎

Idealized Explicit FEM for Analysis of Welding-induced Buckling

by Shintaro MAEDA, Kazuki IKUSHIMA and Masakazu SHIBAHARA

1. 緒 言

船舶や自動車、航空機などの薄板構造物の接合には、広く溶接が用いられる。しかしながら薄板溶接において、溶接による変形は必然的に発生し、かつ薄板の溶接においては厚板の場合と比べて大きな変形を伴う。加えて、座屈形式の変形を生じる場合もあり、構造物の幾何学的非線形性を伴う複雑かつ大きな変形は、製造において深刻な問題となる。したがって、そのような問題を防ぐために、設計段階において座屈形式の変形を含んだ薄板構造物の溶接変形を予測することは重要となる。

座屈形式の変形を含む溶接変形の解析には、固有ひずみを用いた弾性解析による方法 ¹³と熱弾塑性解析による方法 ⁴とが挙げられる。前者は、熱弾塑性解析の結果から逆解析などにより同定した固有ひずみを初期ひずみとして弾性解析することにより、大変形問題を含む溶接変形の予測が可能となる。しかしながら、固有ひずみを用いる方法では、溶接過渡の現象を解析しないため、入熱から冷却にいたるまでの変形や応力の推移を把握することができず、座屈に至るまでの応力状態や部材同士の接触などを考慮することができない。後者は、移動熱源を用いた逐次解析により、溶接過渡の現象の予測が可能であるが、薄板構造においては溶接時の入熱に伴う材料的な非線形現象だけでなく座屈現象を含んだ幾何学的な非線形現象も発生し得ることから、安定的に解を得られないことが考えられ、また膨大な計算コストが必要となる。

一方,著者らはこれまでに,理想化陽解法 FEM と呼ばれる手法を開発することで,100 万要素を超えるような大規模な溶接変形,残留応力問題の解析を実施しており,大規模問題において解析条件および施工条件が溶接変形,残留応力分布におよぼす影響について現実的な計算時間で検討できることを示してきた 51 . 加えて本手法は,動的陽解法 FEM を基にした手法であるため 61 , 大規模解析のみならず,通常の構造解析で用いられる静的陰解法では解析が困難となる飛び移り $^{7.81}$ などを含んだ座屈現象の解析を効果的に行えると期待できる.

そこで、本研究では、座屈形式の変形を含んだ薄板構造物の溶接変形を効果的に予測するために、理想化陽解法 FEM に対して幾何学的非線形性を考慮した手法の開発を行った。そして開発手法を T 継手薄板隅肉溶接に適用し、入熱量と溶接速度が、座屈形式の変形を含んだ溶接変形に及ぼす影響に関する検討を行った。加えて、開発手法を簡易防撓構造の組立溶接に適用し、併せて同条件での実験を実施することで、解析結果と実験結果との比較を通して、開発手法の妥当性について検討を行った。

2. 大変形理想化陽解法 FEM

2. 1 理想化陽解法 FEM

理想化陽解法 FEM は、動的陽解法 FEM を基に開発されていることから、省メモリかつ高速な溶接変形、残留応力の解析が可能である 9,10 . 理想化陽解法 FEM における解析フローは以下に示す通りである.

- 1. 各時間ステップにおける溶接現象を荷重ステップとして分割する.
- 2. 静的平衡状態に収束するまで,動的陽解法 FEM を用いて,式(1)に示す式から変位を計算する.

$$\left(\frac{1}{\Delta t^{2}}[M] + \frac{1}{2\Delta t}[C]\right) \{U\}_{t+\Delta t} = \{F\}_{t} - \int_{V} [B]^{T} \{\sigma\}_{t} dV - \frac{2}{\Delta t^{2}}[M] \{U\}_{t} - \left(\frac{1}{\Delta t^{2}}[M] - \frac{1}{2\Delta t}[C]\right) \{U\}_{t-\Delta t}$$
(1)

ここで、[M], [C], [B]はそれぞれ質量マトリックス、減衰マトリックス、変位-ひずみマトリックスであり、 $\{\sigma\}$, $\{F\}$, $\{U\}_{t+\Delta t}$, $\{U\}_{t-\Delta t}$ は、それぞれ、応力ベクトル、外力ベクトル、時刻 $t+\Delta t$, $t-\Delta t$ における変位ベクトルを示す.

3. 収束が得られた後、次の荷重増分を与え、前のステップに同じように 2 の計算手順を実行する. このとき、質量マトリックス [M] および減衰マトリックス [C] を節点集中型、すなわち、対角成分のみ非零

であると仮定すると式(1) のマトリックス演算はもはや連立方程式ではなくなり、計算規模が大きくなればなるほど陰解法と比べて計算時間が短くなり、また、全体剛性マトリックスを記憶する必要もなくなるので、使用メモリも大幅に小さくなるといえる。加えて、より速く静的平衡状態に達するために、質量マトリックス [M] および減衰マトリックス [C] の調整 $^{(1)}$ を行っている。

2. 2 幾何学的非線形性の導入

本研究では、大変形現象の解析を行うに当たり、式(2)に示す Green-Lagrange ひずみ、また式(3)に示す非線形変位-ひずみマトリックスを用いて、幾何学的非線形性を考慮した.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$
 (2)

$$\begin{bmatrix} B \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} \\ \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} & \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} & \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} \\ \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial N^{\alpha}}{\partial z} \end{bmatrix}$$

$$(3)$$

ここで、 α はある要素内での節点番号を、N は形状関数を表す.

3. T継手薄板隅肉溶接における検討

3. 1 解析モデルおよび条件

Fig. 1 に解析モデルを示す. 本モデルは、T 継手パネルのウェブ部分にフランジを有した構造である. 寸法はベースプレートの板厚が 2 mm, 長さが 1000 mm, 幅が 200 mm であり、ウェブの高さが 50 mm である.

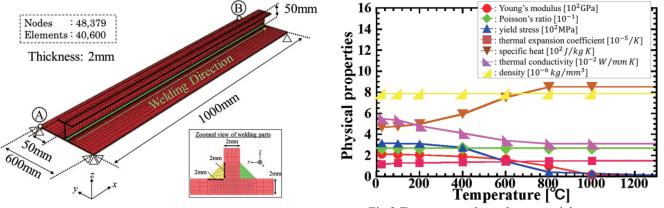


Fig. 1 Analysis model of T-joint.

Fig.2 Temperature dependent material constants.

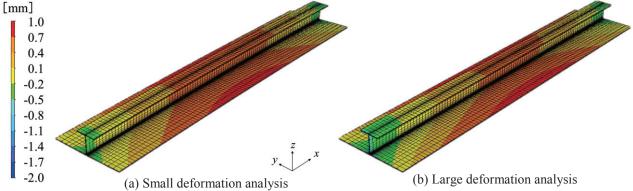


Fig. 3 Comparison between small and large deformation analysis of 75 J/mm.

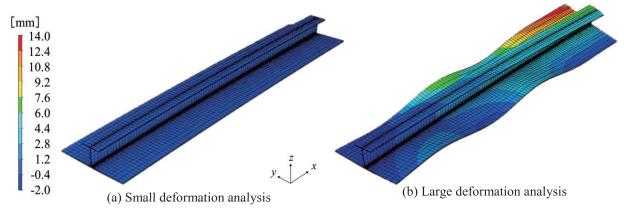


Fig. 4 Comparison between small and large deformation analysis of 100 J/mm.

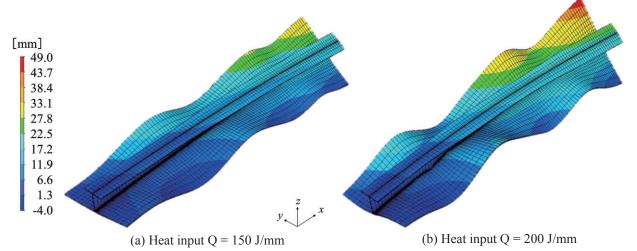


Fig. 5 Effect of heat input on distribution of displacement in z-direction. (v = 10.0 mm/s).

板厚方向の最小分割数は 4 分割であり、節点数、要素数はそれぞれ 48,379、40,600 である。溶接条件は、両側同時に隅肉溶接を行うものとし、片側入熱量 150 J/mm、溶接速度 10.0 mm/s を標準条件として入熱量、溶接速度を変化させてそれぞれが変形に及ぼす影響を検討した。また対象とする材料は、Fig. 2 に示す材料定数の温度依存性を用いた。ここで Fig. 2 の E 、 σ_Y 、 v 、 α 、 c 、 ρ 、 λ はそれぞれ、ヤング率、降伏応力、ポアソン比、線膨張係数、比熱、密度、熱伝導率を示す。

3. 2 入熱量の影響に関する検討

入熱量の影響に関する検討を行うために、溶接速度は $10.0\,\mathrm{mm/s}$ で一定とし、片側入熱量を $75\,\mathrm{J/mm}$ から $250\,\mathrm{J/mm}$ まで変化させた。 Fig. $3.4\,\mathrm{t}$ に入熱量が, $75\,\mathrm{J/mm}$ と $100\,\mathrm{J/mm}$ の場合の微小変形解析による結果と開発 手法である大変形解析による結果の z 方向変位分布を示す。 Fig. $3\,\mathrm{ms}$ から, $75\,\mathrm{J/mm}$ においては,大変形解析と微小変形解析それぞれの結果は同様の変形傾向が確認でき,変形量についても $1.0\,\mathrm{mm}$ より小さな変形であり,ほとんど差異は見られない.一方, Fig. $4\,\mathrm{ms}$ の $100\,\mathrm{J/mm}$ においては,開発手法を用いた場合,微小変形解析の変形傾向とは異なりパネルが波打つ変形が生じており,入熱量の増加による $3\,\mathrm{ms}$ 半波の曲げ座屈形式の変形が生じていることが確認できる.また変形量についても,微小変形解析では $1.2\,\mathrm{mm}$ を超えない小さな変形が発生したのに対して,大変形解析においては $14.0\,\mathrm{mm}$ を超える大きな変形が生じている.

また Fig. 5 に 150 J/mm, 200 J/mm における z 方向変位分布を示す。150 J/mm, 200 J/mm においては、4 半波の波打ち変形に加えて捩れ変形が確認でき、入熱量の増加に伴い、波打ち、捩れのそれぞれの変形量が増加していることが確認できる。

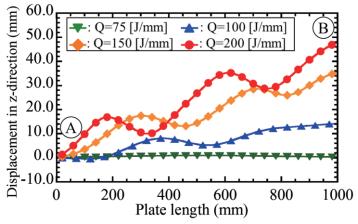
Fig. 6 に、入熱量が 75 J/mm, 100 J/mm, 150 J/mm, 200 J/mm の 4 つのケースについて、解析モデル図 Fig. 1 内に定義したパネル左端の 2 点 A-B 間における z 方向変位分布の比較を示す。Fig. 6 より、75 J/mm においては、変形は非常に小さく、座屈形式の変形は確認できない。しかしながら、入熱量 100 J/mm においては、3 半波の曲げ座屈形式の変形が確認できる。そして入熱量が 150 J/mm 以上においては、4 半波の曲げ座屈形式の変形に加えて捩れ変形が確認でき、その最大値は入熱量の増加に伴い大きくなっていることが確認できる。

Fig. 7 に 75 J/mm から 250 J/mm までの各入熱量についてのパネル左端の 2 点 A-B における, z 方向変位の最大値の比較を示す。同図において、▲は、大変形解析の結果を示し、△は、微小変形解析の結果を示す。Fig. 7 より入熱量が 75,80 J/mm では、微小変形と大変形解析の最大値に差異は見られない。しかしながら、90 J/mm

以上の場合,大変形解析結果の最大値が増加し,3半波の曲げ座屈形式の変形がみられる120 J/mm 未満の場合においては,15 mm 程度の最大値をとることがわかる.そして入熱量が120 J/mm 以上の場合においては,4半波の曲げ座屈形式の変形に加え,捩れ座屈形式の変形を伴うことから,最大値がさらに増加する傾向を確認できる.

3.3 溶接速度の影響に関する検討

溶接速度の影響に関する検討を行うため,入熱量を 150 J/mm で一定とし,溶接速度を 3.0 mm/s から 80.0 mm/s まで変化させた. Fig. 8 に溶接速度が 3.0 mm/s, 7.0 mm/s, 13.0 mm/s, 40.0 mm/s の場合における, z 方向変位分布を示す. Fig. 8 (a)から,溶接速度が 3.0 mm/s の場合においては,部材が大きく捩れており,端部が 90 mm 程度持ち上がる捩れ座屈形式の変形が生じていることがわかる.一方,Fig. 8 (b)に示す,溶接速度が 7.0 mm/s の場合においては,捩れ座屈形式の変形に加え,曲げ座屈形式の変形が確認でき変形の最大値は減少していることが確認できる.また Fig. 8 (c)の溶接速度が 13.0 mm/s の場合においては,パネルが全体的に波打つ,4 半波の曲げ座屈形式の変形が確認でき、溶接速度の増加に伴い,捩れ座屈形式の変形から曲げ座屈形式の変形へ座屈モードが推移していることがわかる.そして溶接速度が 40.0 mm/s においては,5 半波の曲げ座屈形式の変形が



: Large deformation analysis

: Small deformation analysis

Buckling deformation

3 half
waves

4 half waves + tortional

waves

80

100

120

140

160

180

200

220

240

Heat input (J/mm)

Fig. 6 Influence of heat input on distribution of displacement in z-direction along A-B. (v = 10.0 mm/s)

Fig. 7 Influence of heat input on maximum displacement in z-direction. (v = 10.0 mm/s)

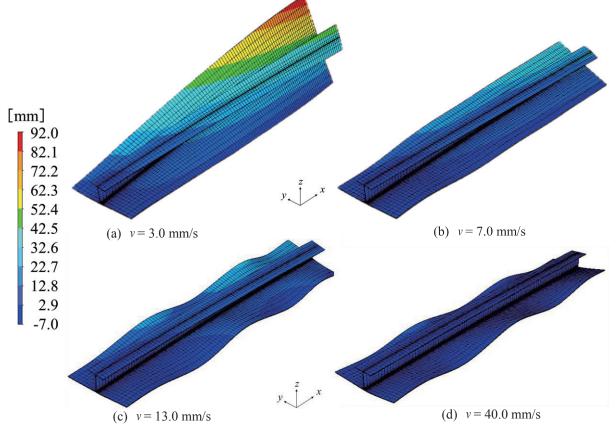


Fig 8. Effect of welding speed on distribution of displacement in z-direction (Q =150 J/mm)

確認できる.

Fig. 9 に、パネル左端の 2 点 A-B における z 方向変位分布の比較を示す。Fig. 9 からも、溶接速度の増加に伴 う捩れ座屈形式の変形から曲げ座屈形式の変形へ座屈モードの推移を確認することができ、また溶接速度が 40.0 mm/s を境に4半波から5半波への曲げ座屈形式の変形への推移も確認できる.

Fig. 10 に各溶接速度についてのパネル左端の2点 A-B における, z 方向変位の最大値の比較を示す. 同図に おいて、▲は、大変形解析の結果を示し、△は、微小変形解析の結果を示す. Fig. 10 より溶接速度の増加に伴 う座屈モードの推移により最大値が変化していることが確認でき、溶接速度が小さく捩れ座屈形式の変形がお こるケースでは最大値が大きく、溶接速度の増加に伴う座屈モードの推移に伴い最大値は減少し、4 半波の曲 げ座屈形式の変形が生じる接速度が 10.0 mm/s から 35.0 mm/s においては、おおよそ 30mm のたわみ量となり、 5 半波の曲げ座屈形式の変形が生じる接速度が 40.0 mm/s から 80.0 mm/s においては, おおよそ 10mm のたわみ 量となる.

加えて、Fig. 11 に溶接速度が 3.0 mm/s の場合における、溶接過渡の変形挙動および z 方向変位分布の変化を 示す. Fig. 11 から、溶接速度が遅く捩れ座屈形式の変形が生じる 3.0 mm/s においては、溶接トーチの進行中に、 端部が持ち上がる捩れ変形が生じ始め、その後の溶接トーチの進行に伴い捩れが増大し、完全冷却後には捩れ 座屈形式の変形が発生することを確認できる. 同様に Fig. 12 に溶接速度が 13.0 mm/s の場合における, 溶接過 渡の変形挙動およびz方向変位分布の変化を示す. Fig. 12 から、溶接速度が速く曲げ座屈形式の変形が生じる 13.0 mm/s においては、溶接トーチの進行中には、大きな変形は見られない. しかしながら、溶接終了後の冷却 過程においてパネル全体に波打つ変形が生じ始め、完全冷却後には曲げ座屈形式の変形が確認できる。

以上のように、移動熱源を用いた逐次解析により、溶接条件の違いによる各座屈モードの形成過程の違いを 確認することができた.

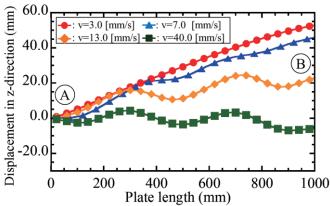
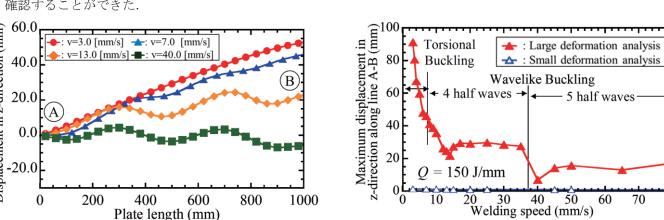


Fig. 10 Influence of welding speed on maximum displacement Fig. 9 Influence of welding speed on distribution of in z-direction along line A-B. (Q =100 J/mm) displacement in z-direction along A-B. (Q =100 J/mm)



[mm] 92.0 82.1 72.2 62.3 52.4 42.5 32.6 22.7 12.8 2.9 -7.0 (a) Middle of welding (b) Three-quarters of welding (c) End of welding (d) After complete cooling

Fig. 11 Influence of welding speed on distribution of welding distortion during welding (v = 3.0 mm/s).

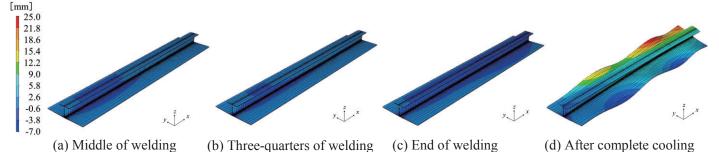


Fig. 12 Influence of welding speed on distribution of welding distortion during welding (v = 13.0 mm/s).

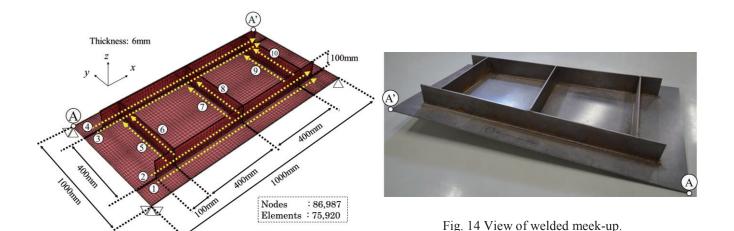


Fig.13 Analysis model of stiffened structure.

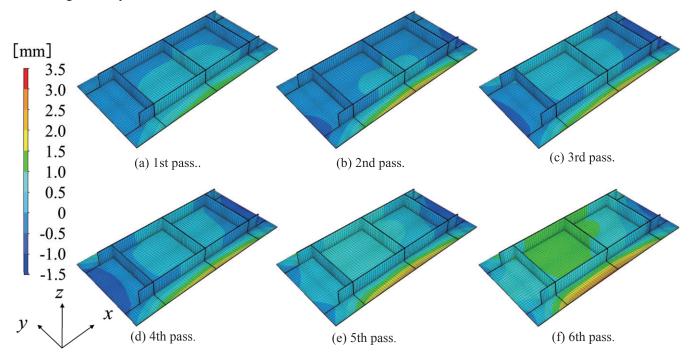


Fig. 15 Change of distribution of displacement in z-direction for welding passes 1 to 6. (Before buckling.)

4. 簡易防撓構造組立溶接における検討

4. 1 解析モデルおよび溶接条件

本章では、開発手法を簡易防撓構造組立溶接に適用し、同条件での実験を実施することで、解析結果と実験結果との比較を通して、溶接座屈変形解析における有用性を示す。Fig. 13 に解析モデルを示す。本モデルは、ベースプレートの板厚が 6 mm、長さが 1200 mm、幅が 600 mm であり、板厚方向の最小分割数は 10 分割である。ベースプレート上に長手方向に 2 本、幅方向に 3 本のスティフナーを有している。スティフナーの板厚は 6 mm、幅は 100 mm で、長さは、長手方向、幅方向で異なり、それぞれ 1000 mm、400 mm である。節点数、要素数はそれぞれ 86,987、75,920 である。スティフナーの左右を片側ずつ、計 10 パスで入熱し、溶接順序は Fig. 13 内に示す通りである。溶接条件は、電流、電圧を、それぞれ 180.0 A、26.0V とし、溶接速度4.3 mm/s をとした。また対象とする材料は、Fig. 2 に示す材料定数の温度依存性を用いた。

4. 2 解析結果および実験結果

Fig. 14 に実験時の溶接終了後の結果を示す. 実験においては端点 A'が大きく持ち上がる捩れ座屈形式の変形が生じていることが確認できる.

Fig. 15 に 1 パスから 6 パス目までの z 方向変位分布を示す。Fig. 15 より、1 パスから 6 パス目においては、最大で 3.5 mm 程度の変位となっており、大きな変形は見られない。長手方向を入熱する 1 パスから 4 パスにおいては、溶接線に近い部分において変形が生じており、幅方向に入熱を行う 5、6 パスにおいても全体的な変形は小さいことが確認できる。

Fig. 16 に 7 パスから 10 パス目までの z 方向変位分布を示す。Fig. 16 より,7 パス目終了後に解析モデル図 Fig. 13 内に示した端点 A'が z 方向に 12 mm ほどの持ち上がる捩れ変形が生じていることが確認できる。そして,残りの 8 パスから 10 パスにおいて,7 パス目に生じた捩れ変形が増加していることが確認でき,最終的に捩れ座屈形式の変形が生じている。Fig. 14 および Fig. 16(d)より,解析結果が実験結果と同様の変形傾向であることが確認できる.

Fig. 17 にパス毎の点 A'における z 方向変位の履歴を示す. 同図からも, 1 パスから 6 パスまでは, 全体的に小さな変形であることがわかり, 7 パス終了後に 15 mm 程度の変形が生じていることが確認できる. 加えて残りの溶接パスにおいて, 捩れ変形が増大し最終的に 140 mm 程度の z 方向変位が確認できる.

Fig. 18 に解析結果および実験結果の解析モデル図 Fig. 13 内に定めたベースプレート端部の線 A-A'上の z 方 向変位の比較を示す. 図中の▲は、実験計測結果を示し、緑の実線は微小変形解析の結果、赤の実線は開発手法である大変形解析結果を示す. Fig. 18 より、開発手法の結果と実験結果が良好に一致していることが確認できる.

以上のように、開発手法による溶接時の座屈変形予測結果と実験計測結果は定量的に一致しており、開発手法を用いることで簡易防撓構造組立溶接時の捩れ座屈問題を定量的に解析可能であると言える.

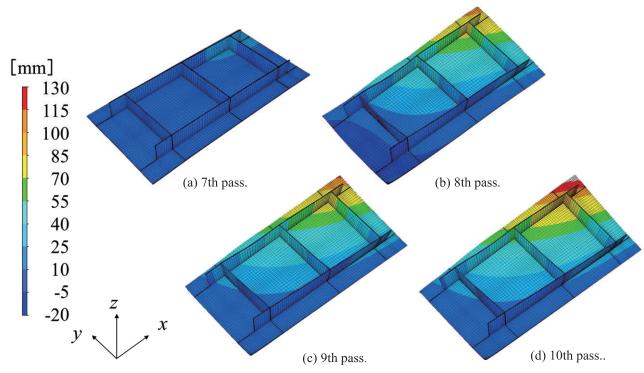


Fig. 16 Change of distribution of displacement in z-direction for welding passes 7 to 10. (After buckling.)

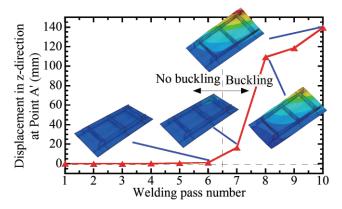


Fig. 17 History of displacement in z-direction at point A' for welding pass.

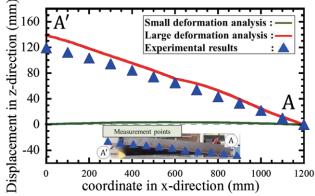


Fig. 18 Comparison between Developed method and Experiment in displacement in z-direction.

4. 結 言

本研究では、座屈形式の変形を含んだ薄板構造物の溶接変形を効果的に予測するために、理想化陽解法 FEM に対して幾何学的非線形性を考慮した数値解析手法の開発した。 T 継手薄板隅肉溶接時の変形予測に対して開発手法を適用し、入熱量と溶接速度が、座屈形式の変形を含んだ溶接変形に及ぼす影響に関する検討を行った.加えて、開発手法を簡易防撓構造の組立溶接時の変形予測に対して適用し、同条件での実験を実施することで、解析結果と実験結果との比較を通して、開発手法の妥当性について検討をした結果、以下の知見を得た.

- 1) 開発手法を T継手薄板隅肉溶接時の変形予測に対して適用し, 初期不正を考慮せずに解析を実施した結果, 曲げ座屈形式の変形と捩れ座屈形式の変形の 2 つの異なる座屈モードの変形を解析上で確認した.
- 2) 入熱量が座屈変形に及ぼす影響について検討し、入熱量が大きい場合において曲げ座屈形式の変形が生じ、入熱量の増加に伴い、曲げ座屈の半波数の増加および捩れ座屈形式の変形へ遷移することを確認した.
- 3) 溶接速度の影響について検討し、溶接速度が小さい場合において、曲げ座屈形式の変形が生じ、溶接速度 の増加に伴い、捩れ座屈形式の変形から曲げ座屈形式の変形へ遷移することを確認した. さらに溶接速度 を増加に伴う曲げ座屈形式の変形の半波数の変化も確認された.
- 4) 溶接過渡の変形について検討して結果, 捩れ座屈形式の変形は溶接トーチの進行中に, 端部が持ち上がる 捩れ変形が生じ始め, 最終的に捩れ座屈形式の変形が発生することが分かった. 曲げ座屈形式の変形は溶 接中においては大きな変形は見られず, 冷却過程において全体的に波打つような変形が生じ始め, 最終的 に曲げ座屈形式の変形が発生することが分かった. 以上のような座屈形式の変形の形成過程の違いを, 移 動熱源を用いた逐次解析により確認した.
- 5) 開発手法を簡易防撓構造組立溶接に適用し、初期不正を考慮しない全10パスの溶接において、7パス溶接時に端部が持ち上がる捩れ変形が生じ始め、最終的に捩れ座屈形式の変形の発生を解析上で確認した。また、同条件での実験とのz方向変位の比較において、良好な一致が得られてた。このことから、開発手法は、座屈形式の変形を含んだ薄板構造物の安定的な溶接変形解析が可能であると考えられる。

参考文献

- [1] X. Zhong, H. Murakawa and Y. Ueda, Buckling Behavior of Plates under Idealized Inherent Strain, Transactions of JWRI, 24(2), (1995), 87-91.
- [2] Madhu S Nair and H. Murakawa, Theoretical Study on Forming of Twisted Tsection Longitudinals (1st Report), Transactions of JWRI, 30(2), (2001), 109-115.
- [3] M. Shibahara, K. Ikushima, Study on Welding Distortion of Stiffened Thin-Plate Structures Using Idealized Explicit FEM, Quarterly Journal of the Japan Welding Society, 33(2), (2015), 175–179.
- [4] Jiangchao WANG and H. MURAKAWA, Study on Transient Buckling Behavior of Thin Plate Structures during Welding Process, Transactions of JWRI, (2012), 87-90.
- [5] M. Shibahara, K. Ikushima, S. Itoh, K. Masaoka, Computational Method for Transient Welding Deformation and Stress for Large Scale Structure Based on Dynamic Explicit FEM, Quarterly Journal of the Japan Welding Society, Vol.29, (2011), 1–9.
- [6] Peter Wriggers, Nonlinear Finite Element Methods, Springer, (2008), 209-212.
- [7] F. Kikuchi, H. Ohya, Y. Ando, Application of Finite Element Method to Axisymmetric Buckling of Shallow Spherical Shells under External Pressure, Journal of Nuclear Science and Technology, 10:6, 339-347.
- [8] S. Houliara, S.A. Karamanos: Buckling and post-buckling of long pressurized elastic thin-walled tubes under in-plane bending, International Journal of Non-Linear Mechanics, Vol.41, (2006), 491–511.
- [9] K. Ikushima, S. Itoh and M. Shibahara: Numerical Analysis of Welding Deformation for Large-Scale Structure, Quarterly Journal of the Japan Welding Society, Vol.31, (2013), 138-142.
- [10] Peter Wriggers: Nonlinear Finite Element Methods, Springer, (2008), 209-212.
- [11] Y. Ueda, K. Fukuda, K. Nakacho and S. Endo: A New Measuring Method of Residual Stresses with the Aid of Finite Element Method and Reliability of Estimated Values, Journal of the Society of Naval Architects of Japan, Vol.138, (1975), 499–507.