

大規模熱弾塑性解析手法の実機適用

大阪府立大学大学院
 トヨタ自動車株式会社
 (株)トヨタプロダクションエンジニアリング

○生島 一樹
 柴原 正和
 桑原 仁志
 金武 完明

Application of large scale thermal elastic plastic analysis method to actual structures

by Kazuki IKUSHIMA, Masakazu SHIBAHARA, Hitoshi KUWABARA and Hiroaki KANETAKE

1. 緒言

現在、自動車産業においては、自動溶接技術の導入により、生産効率の向上や人的コストの削減が進められているとともに、環境問題への対応として、高強度材料の使用により車体構造を薄板化することで、車体重量の軽量化がすすめられている。薄板の溶接においては、変形が大きくなることから、溶接変形が問題となる場合が発生している。自動溶接を適用するためには、複雑な形状を有する部材の溶接変形を事前に予測し、設計に反映する必要があることから、薄板構造における溶接変形の予測が重要となってきた。

溶接変形を予測する技術としては、熱弾塑性解析手法を用いた非線形弾塑性解析¹⁻³⁾が挙げられる。熱弾塑性解析においては、溶接トーチからの入熱により材料を加熱、熔融させる際の力学的プロセスを逐次解析することから、膨大な計算時間やメモリ容量が要求される。そのため、従来では、解析規模が簡単な溶接継手程度にとどまっていた。しかしながら、近年の解析技術の開発が進展し、実用的な構造物の溶接組立時の変形や残留応力の予測が実現しつつある^{4,5)}。

そこで、本研究では、大規模複雑構造物の溶接製作時の変形挙動を現実的な計算時間で解析可能な手法として理想化陽解法 FEM(Idealized Explicit FEM: IEFEM)⁶⁾に注目し、自動車に使用される実用部材の溶接変形予測に対して適用する。また、薄板複雑構造物の解析を実施するために、マルチグリッド法と呼ばれる手法を理想化陽解法 FEM に対して導入することで、解析手法の一層の効率化を行う。以上の検討を通して、IEFEM の実機への適用性について検証する。

2. 大規模熱弾塑性解析手法

2.1 理想化陽解法 FEM

理想化陽解法 FEM は動的陽解法 FEM⁷⁾を基に構造解析の高速・省メモリ化を実現する解析手法である。ここでは、その解析理論の概略について説明する。

理想化陽解法 FEM においては、以下の①②③の手順に従い解析を進める。

- ① 荷重増分、すなわち溶接過渡状態において温度増分を負荷し、その状態を保持する。
- ② 動的陽解法 FEM の基礎式(1)に基づき静的平衡状態に達するまで、変位を計算する。
- ③ 静的平衡状態が得られた場合には、次の荷重ステップの計算に移るために、手順①に戻る。

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] + \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{U\}_{t+\Delta t} = \{F\}_t - \sum_{e=1}^{N_e} \int_{V^e} [B]^T \{\sigma\} dV - \frac{2}{\Delta t^2} [M] \{U\}_t - \left(\frac{1}{\Delta t^2} [M] - \frac{1}{2\Delta t} [C] \right) \{U\}_{t-\Delta t} \quad (1)$$

ただし、 $[M]$ 、 $[C]$ 、 $[B]$ 、 $\{\sigma\}$ はそれぞれ質量マトリックス、減衰マトリックス、変位-ひずみ関係マトリックスおよび、応力ベクトルを示し、 $\{U\}_{t+\Delta t}$ 、 $\{U\}_t$ 、 $\{U\}_{t-\Delta t}$ 、 $\{F\}_t$ はそれぞれ、時刻 $t+\Delta t$ 、 t 、 $t-\Delta t$ における変位ベクトル、および、時刻 t における荷重ベクトルを示す。また、 N_e は解析モデルの要素数、 V^e は要素の体積を示す。

ここで、質量マトリックス $[M]$ および、減衰マトリックス $[C]$ を節点集中型の対角マトリックスとすることで、式(1)のマトリックス演算は、もはや連立方程式ではなくなり、省メモリに解析を行うことが可能となる。また、上記の計算手順により静的平衡状態が得られた時点では、慣性項と減衰項の影響は無視できる程度に小さくなることから、計算手順①、②の静的平衡状態を得る過程においては、静的平衡状態に達するまでに

必要となる時間ステップを削減できるように質量マトリックス $[M]$ および減衰マトリックス $[C]$ を調整することができる。本研究では、文献⁶⁾を基に臨界振動とクーラン条件⁷⁾から導出した質量マトリックスおよび減衰マトリックスを使用することで効率化を図った。

以上の計算手順を用いることで、理想化陽解法 FEM においては、動的陽解法 FEM に基づきながらも静的平衡状態への収束を考慮した解析が可能となり、静的陰解法 FEM と同程度の解析精度を有し、かつ、高速、省メモリな解析が期待できる。

2. 2 マルチグリッド法

自動車の車体においては薄板が多く用いられることから、動的陽解法 FEM を基にした理想化陽解法 FEM においては、薄板特有の長周期の振動により、静的平衡状態への収束に多くの時間ステップが必要となり、解析の効率が低下する恐れがある。

そこで、本研究では、薄板構造の解析においても解析の効率を向上させるため、マルチグリッド法と呼ばれる手法を導入した。マルチグリッド法は大規模な連立方程式を効率的に解くための方法の一つで、反復解法において波長の長い誤差を疎な格子で収束させ、波長の短い誤差を密な格子で収束させる手法である。このような手法を採用することで、通常反復法において収束の遅い波長の長い誤差を早く収束させることが可能になることから、大規模問題において高速に連立方程式を求解できる手法として期待されている。また、一定精度の解を得るために必要な演算量が自由度に比例することが証明されており、高速な反復解法であることが知られている⁸⁾。このように、マルチグリッド法は非常に高速な解法として注目されており、現在、盛んに開発が進められている手法の一つである。

しかし、マルチグリッド法は、その計算において、波長の長い誤差を収束させるための疎な格子を準備する必要があることから、これまでは疎な格子を容易に作成できる差分法に多く適用されてきた。一方、FEM をはじめとする複雑な構造を持つ非構造格子においては、メッシュ作成に要するコストが大きく、疎な格子を作成することは難しいことから、FEM でのマルチグリッド法の利用は困難である。

このような問題を解決するために代数マルチグリッド法 (Algebraic Multigrid: AMG) が提案されている。AMG では、連立方程式の係数マトリックスの代数的性質のみから疎な格子を作成し、この格子に対してマルチグリッド法の考え方を適用する。このような手法を採用することで、AMG では疎な格子が自動的に作成されることから、ユーザー側で疎な格子を作成する必要がないため、高速かつ汎用的な解法として注目されており、現在、様々な手法が開発されている。AMG を用いた主要な解法としては、Stüben による手法⁹⁾、Brandt らによる手法¹⁰⁾、Smoothed Aggregation を用いた手法¹¹⁾の3つが挙げられる。これらの手法は、上位階層から下位階層に補間を行う際の行列の生成手順が異なるのみで、補間行列を生成する際に、次式のようなベクトル $\{e\}$ を異なる階層においても精度よく近似できるような補間行列 $[P_i]$ を求める。

$$[K_i]\{e\} \approx 0 \tag{2}$$

なお、式(1)において、 $\{e\} \neq 0$ である。式(2)を満たすような $\{e\}$ は、長波長の誤差に相当し、密なグリッドでの反復解法では収束しにくい成分となるため、これらの成分をより下位の階層のグリッドで補正することで効率的に解を求める。

下位階層における剛性行列、すなわち係数行列 $[K_{i+1}]$ は、補間行列 $[P_{i+1}]$ と上位階層の係数行列 $[K_i]$ を基に、次式により算出する。

$$[K_{i+1}] = [P_{i+1}]^T [K_i] [P_{i+1}] \tag{3}$$

上記の AMG における代表的な3つの手法の内、Stüben らの方法、および、Brandt らの方法は、上位階層のグリッドの中から下位階層に残す自由度を選択する必要がある。加えて、これらの方法においては、下位階層の係数行列を作成するために、複数のパラメータを調整する必要がある。一方、Smoothed Aggregation による方法は、Fig. 1 に示すように、上位階層の自由度の集合(アグリゲート)として下位階層の自由度を表現する。この時、上位階層の自由度は、係数行列で記述される自由度同士の関係性の強弱を基に、下位階層のアグリゲートの1つに必ず入るように判定される。

以上のように、AMG 法を用いることで FEM に対してもマルチグリッド法を導入することが可能であり、その中でも

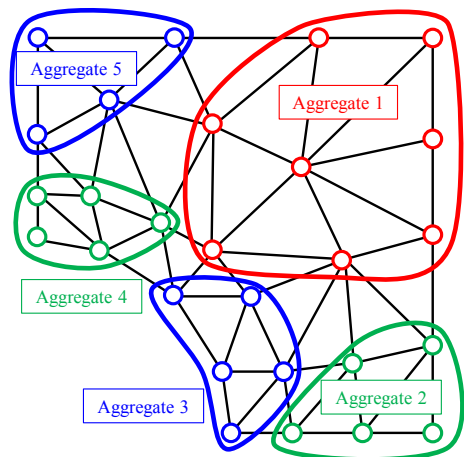


Fig. 1 Example of aggregates

Smoothed Aggregation による手法はチューニングパラメータが少なく、扱いやすいと考えられることから、以降では、Smoothed Aggregation による方法に基づき、大規模薄板構造物の溶接変形解析に向けた解析手法を提案する。

2. 3 マルチグリッド法を導入した理想化陽解法 FEM

FEM 溶接熱弾塑性解析においては、溶接の現象を逐次解析するため、加熱の開始から完全冷却にいたるまでを荷重ステップに分割し、それぞれの荷重ステップにおいて弾塑性の非線形解析を行う。そのため、解析全体の荷重ステップは数百から数千に達するが、前項で述べたマルチグリッド法の処理は複雑な計算手順を含むため、すべての荷重ステップにおいてその処理を行うことは非効率である。そこで、本研究では、Fig. 2 のフローに示すような手法で理想化陽解法 FEM に対してマルチグリッド法を導入した。まず、解析の前処理としてアグリゲートを作成し、最下層のグリッドにおいて LU 分解を行い保存する。続いて、温度場を更新し、更新された温度場での全体剛性マトリックスを作成する。ここで、剛性マトリックスの作成は最上位の階層においてのみ行う。これは、溶接の進展に伴う温度変化による非線形の変形は、トーチ周辺の狭い領域に生じる局所的な変形であることから、最上位、すなわち、入力したメッシュ上の剛性マトリックスを更新することで非線形の変形への追従性を向上させるためである。なお、すべての階層の剛性マトリックスは疎行列形式で保存することで、メモリ消費量を解析自由度に比例する程度に削減する。

更新した最上位の剛性マトリックスとその他の階層の剛性マトリックスを用いて、理想化陽解法 FEM の考え方に基づき変位を計算する。これは Fig. 3 に示す手順で行う。まず、最上位の階層において、与えられた残差力ベクトルに対して理想化陽解法を適当な回数適用し変位を計算し、その状態で次式により残差力ベクトルを算出する。

$$\{R_1\} = \{F_1\} - [K_1]\{U_1\} \quad (4)$$

計算された残差力ベクトル $\{R_1\}$ を次式により第二層のグリッド上に補間し、第二層のグリッド上での荷重ベクトル $\{F_2\}$ を算出する。

$$\{F_2\} = [P_2]^T \{R_1\} \quad (5)$$

ここで、 $[P_2]$ は、第二層のグリッドを作成する際に生成した補間関数を表す。なお、補間関数の作成方法は文献¹¹⁾に示されている pseudo-Laplacian を用いた異方性の強い問題に対応した手法を採用した。式(4)の補間処理により得られた荷重ベクトルを用いて、第一層と同様に理想化陽解法に基づき変位を算出する。以上の

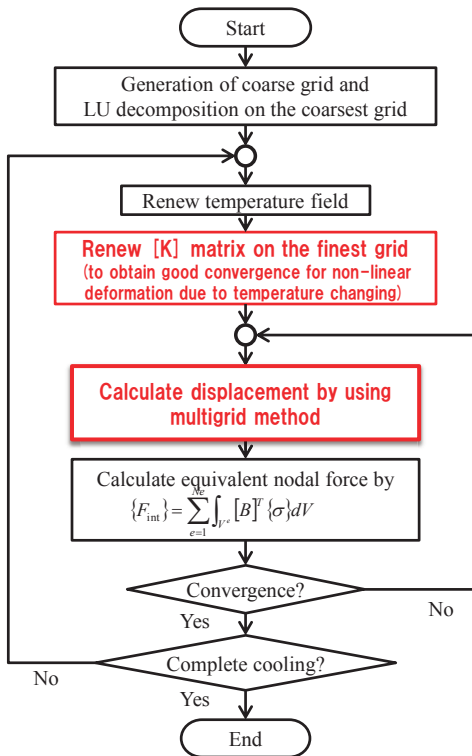


Fig. 2 Flow of multigrid method introduced Idealized Explicit FEM

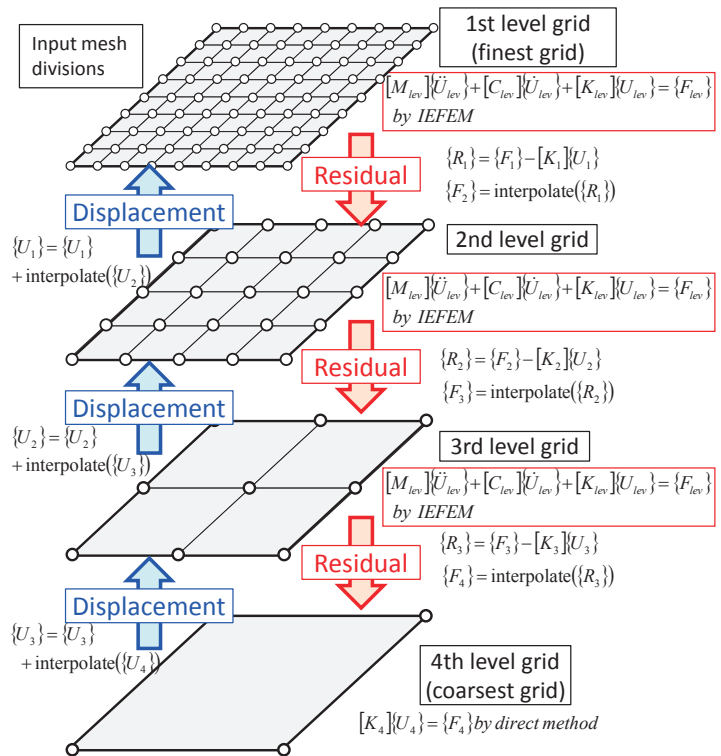


Fig. 3 Schematic illustration of multigrid method introduced Idealized Explicit FEM

処理を最下層のグリッドに達するまで再帰的に行い、最下層のグリッドにおいては、グリッド作成時に行った LU 分解を使用し直接法により変位を算出する。

最下層の変位を算出した後は、次のように、最下層の変位を第三層のグリッド上に補間し、第三層のグリッドの変位との和をとり、第三層の変位を更新する。

$$\{U_3\} \leftarrow \{U_3\} + [P_4]\{U_4\} \quad (6)$$

計算された第三層のグリッドの変位と荷重ベクトルを用いて理想化陽解法に基づき変位を算出する。理想化陽解法による変位の計算が完了した後は、第三層の変位ベクトルを第二層に補間し、第三層と同様に変位を算出する。これらの処理を最上位のグリッドまで再帰的に行い、マルチグリッド法による 1 回の反復計算を終了する。なお、説明の都合上、階層数を 4 としたが、実際の解析においては、階層に含まれる解析自由度数が一定数以下になるまで疎な格子を再帰的に作成する。

なお、通常マルチグリッド法においては、Fig. 3 の反復解法の計算部分に Jacobi 法などの定常反復法を用いることが多いが、本手法では理想化陽解法を用いた。これは、Gauss-Seidel 法や SOR 法などの定常反復法は逐次処理を伴うため、並列化が難しいためである。また、Jacobi 法に対しては並列化を容易に適用することができるが、Jacobi 法は係数行列が狭義優対角であることが収束するための条件として要求されるため、安定的に収束が得られない可能性があり、解析の安定性という点から使用を見送った。

以上の計算手順を所定の収束条件を満たすまで反復することで、1 荷重ステップの変位を求める。また、完全冷却に達するまで荷重ステップの計算を繰り返し、解析を進める。

このような計算手順をとることで、提案手法は、通常理想化陽解法 FEM と比較し、薄板構造物の解析において優れた収束性が得られると考えられる。

3. 小型試験体の溶接変形予測への適用による解析精度検証

薄板構造溶接に関する基礎的検討として、T 継手隅肉溶接における溶接変形問題に対して IEFEM を適用し、実験結果と比較することで、本手法の適用性について検証する。Fig. 4 に実験装置の概略を示す。本実験においては下板の一方が治具で拘束されたものとなっている。また、下板の寸法は、200mm×200mm の平板であり、板厚は 3.2mm である。下板の幅方向の中央に高さ 150mm、板厚 3.2mm の縦板を片側から隅肉溶接する。

拘束条件に関しては、Fig. 4 に示す様に溶接反対側の 2 か所をクランプを用いて y, z 軸方向に固定しており、また、縦板も同様に 2 か所を y 軸方向に拘束している。端部は、台座の突き当て方向に関して拘束している。本実験を模擬した FE 解析モデルを作成した結果、節点数、要素数はそれぞれ 31,185、24,480 となった。なお、使用した要素はすべて六面体要素である。溶接条件は、電流、電圧および溶接速度をそれぞれ 254.3 A、24.3 V、13.33 mm/s とした。下板、縦板の材料はともに軟鋼とした。

Fig. 5 に、溶接後の z 軸方向の変位分布を示す。同図において、変形倍率は 20 倍としている。Fig. 5 に示すように、溶接に伴い角変形が発生することで、下板の治具により固定されていない側が持ち上がるような変形となっ

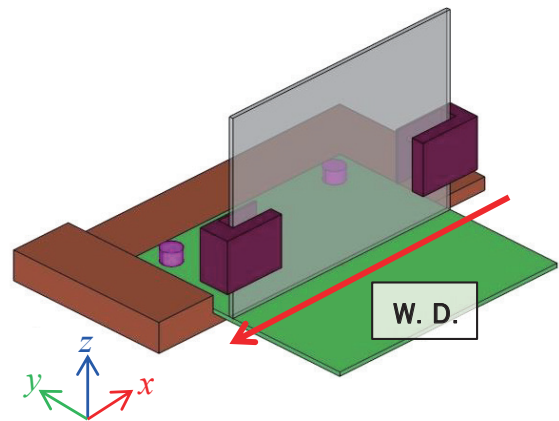


Fig. 4 Experimental setup

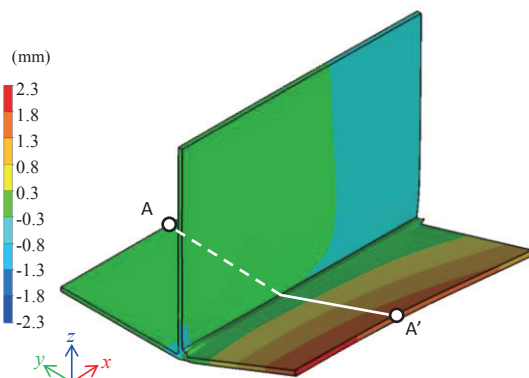


Fig. 5 Deformed shape after welding and distribution of displacement in z direction

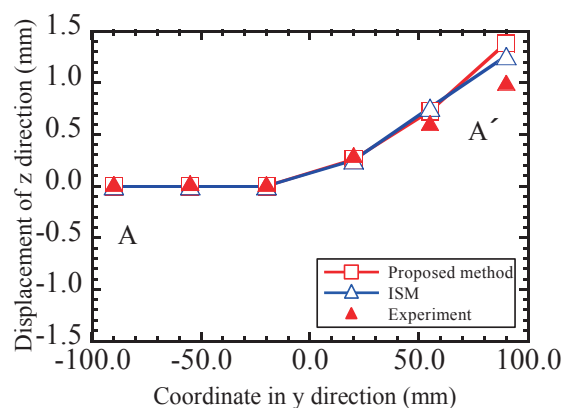


Fig. 6 Comparison of displacement in z direction

ていることが確認できる。また、Fig. 6 に提案手法、実験計測結果、および、参考として実施した ISM を使用した静的陰解法 FEM⁴)により得られた面外方向変位分布の比較を示す。同図より、いずれの手法も角変形の発生に伴い下板の拘束されていない側が持ち上がるような変形の傾向が再現されていることが確認できる。また、および変形量が実験結果と良好に一致していることが確認できる。

以上のように、提案手法により得られた T 継手隅肉溶接の変形解析結果は、参考手法による解析結果とほぼ同等の解析精度であり、また、実験結果とも良く一致していることが確認できた。

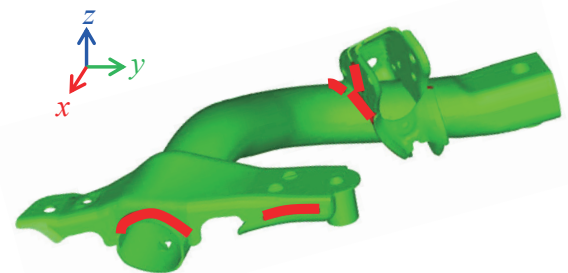
4. 実機溶接組立て時の溶接変形予測

4. 1 サイドレールモデル

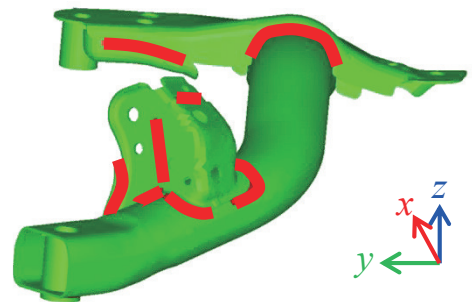
提案手法の実機における溶接変形の予測への適用性を示すために、Fig. 7 に示すサイドレールの溶接に対して提案手法を適用する。サイドレールは自動車のリアサスペンションメンバーを構成する部品であり、板厚は最小で 1.8mm、最大で 4.5mm である。サイドレール溶接解析モデルの要素分割を行った結果、節点数、要素数は、それぞれ、161,071、119,816 要素となった。溶接は全 15 本で、溶接条件は、電流を 169.22 A から 220.06 A、電圧を 17.32 V から 24.18 V、溶接速度を 16.67 mm/s とした。溶接線の位置は Fig. 8 に示すとおりである。拘束条件は Fig. 9 に示すとおりとした。なお、Fig. 9 中①の拘束条件は、冷却開始から 8 秒後に解放される拘束条件であり、②の拘束条件は、冷却開始から 17 秒後に解放される拘束条件である。冷却開始から 26 秒後にはすべての拘束条件を解放し、剛体拘束のみを考慮し、室温に至るまで冷却する過程を解析する。本解析には、CPU に Intel Core i7 3.2GHz プロセッサ、GPU に NVIDIA GeForce GTX 980 プロセッサを搭載した計算機を使用した。

Fig. 10 に溶接が終了し、室温まで冷却した時点での相当応力分布を示す。同図より、溶接線およびその周辺部において、非常に高い残留応力が生じていることが確認できる。Fig. 11 に z 方向変位の分布を示す。同図より、熱弾塑性解析の結果、サイドレール溶接後に、最大で 1.5 mm 程度の変形が得られたことが分かる。また、Fig. 12 に、Fig. 11 に示す A1 から A6 までの各点の変位を実験と解析で比較した結果を示す。同図より、提案手法による解析結果は実験計測結果と良く一致しており、高精度な解析ができていることが確認できる。

なお、本解析の荷重ステップ数は 6,033 であり、要した計算時間は約 4 時間であった。



(a) View from positive x direction



(b) View from negative x direction

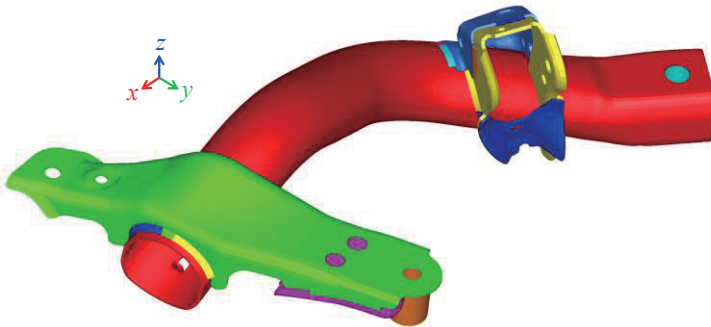


Fig. 7 Analysis model of side rail member

Fig. 8 Position of welding lines in side rail model

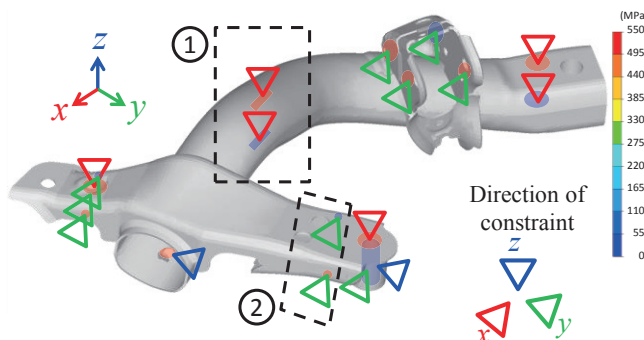


Fig. 9 Constraint conditions for side rail model

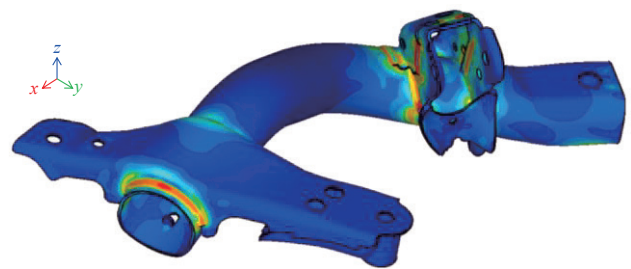


Fig. 10 Equivalent stress distribution in side rail model after welding

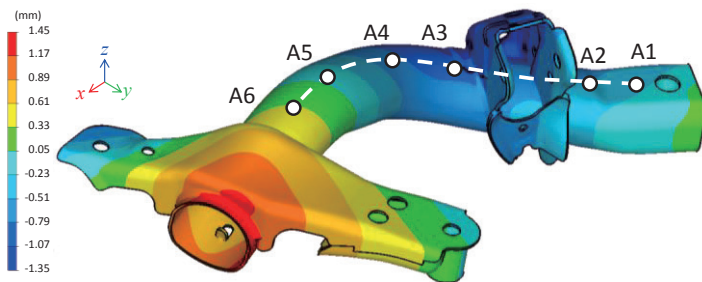


Fig. 11 Distribution of displacement in z direction in side rail model after welding

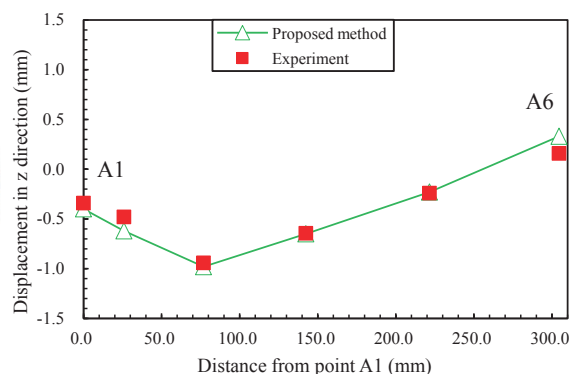


Fig. 12 Comparison of displacement in z direction in side rail model after welding along line A1-A6

4. 2 サフロントサスペンションメンバーモデル

前節で示したモデルより大規模かつ複雑なモデルにおける提案手法の適用性について検討するために、フロントサスペンションを構成する部品の溶接変形の予測に対して提案手法を適用した。Fig. 13 に解析モデルの全体図を示す。本モデルの最小板厚は 2.0 mm、最大板厚は 7.0 mm である。本モデルの要素分割の結果、節点数、要素数は、それぞれ、700,687, 521,623 となった。溶接条件は、電流を 170 A もしくは 180 A、電圧を 21 V もしくは 22 V、溶接速度を 13.33 mm/s とし、Fig. 14 に示す全 40 本の溶接線に対して 4 段階に分けて施工する。第 1 段階の溶接の後、1800 秒の冷却を行う。その後、第 2 段階の溶接の後 40 秒の冷却、第 3 段階の溶接の後 40 秒の冷却、第 4 段階の後 15 秒冷却し、最終的に室温まで冷却するまでの解析を行う。また、拘束条件は Fig. 15 に示す通りで、第 1 段階の溶接と冷却の間は、同図に示したすべての拘束条件を考慮する。第 2 段階、第 3 段階、第 4 段階およびその冷却の間は、同図中①で示される拘束を解放した状態とする。第 4 段階の後の 15 秒の冷却後、室温まで冷却する間は、すべての拘束を解放し、剛体拘束のみ考慮する。解析にはサイドレールの解析時と同じ計算機を使用した。

Fig. 16 に完全冷却後の相当応力分布を示す。同図より、溶接の実施に伴い、溶接線とその周囲に大きな応力が分布していることが分かる。Fig. 17 に z 軸負方向から見た完全冷却後の z 方向変位分布を示す。また、

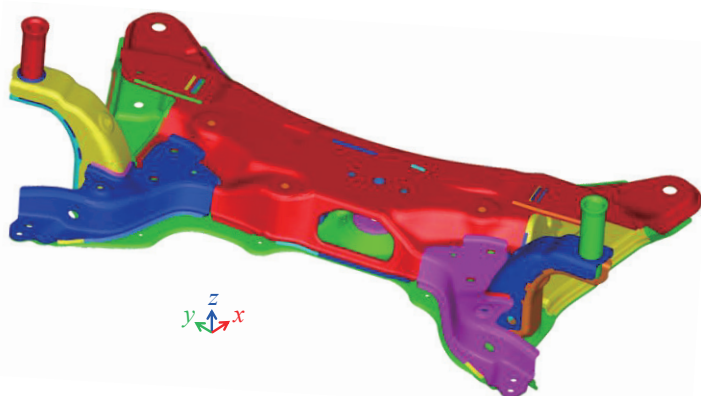
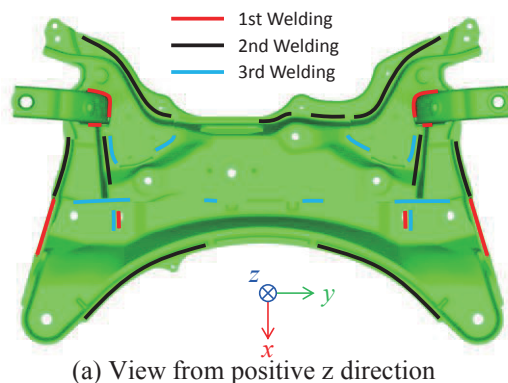
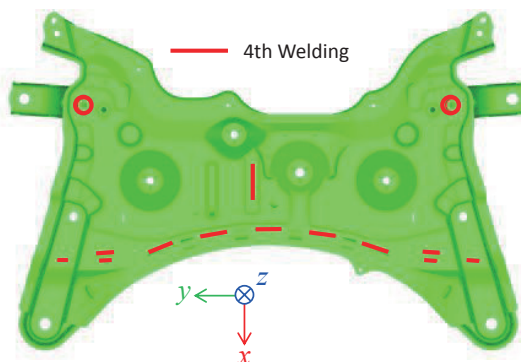


Fig. 13 Analysis model of front suspension member



(a) View from positive z direction



(b) View from negative z direction

Fig. 14 Position of welding lines in front suspension model

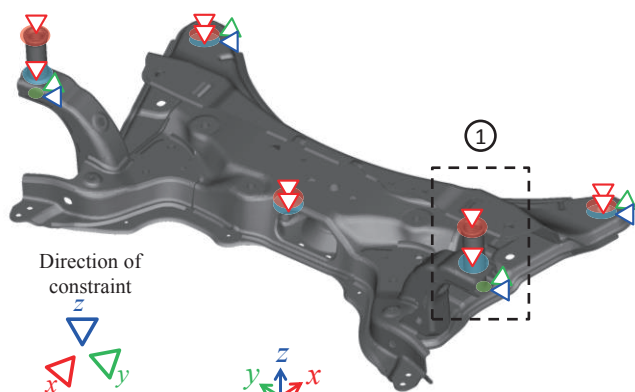


Fig. 15 Constraint conditions for front suspension model

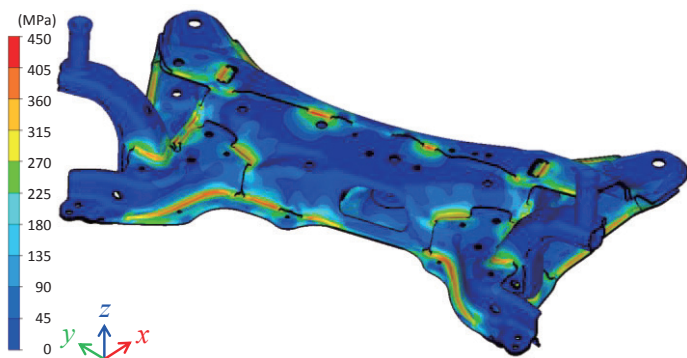


Fig. 16 Equivalent stress distribution in front suspension model after welding

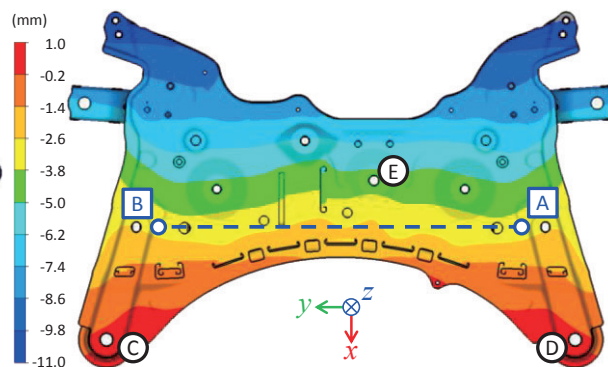


Fig. 17 Distribution of displacement in z direction in front suspension model after welding

Fig. 18 に、Fig. 17 に示す下板の A-B 線上の z 方向の変位分布の計測結果と解析結果の比較を示す。なお、同図の変位は、Fig. 17 の C 点、D 点、E 点で構成される面からの距離として定義している。Fig. 18 より、本解析は計測結果の傾向を良く再現できており、定量的にも良い一致を示していることが確認できる。また、同図より、下板は A-B 線の中央部が盛り上がるような変形となっていることが分かる。これは、上板と下板を溶接する工程の溶接線が他の工程の溶接線より長くなっており、その位置が構造の中立面より下側であるため、溶接後の縦収縮により、中立面した側が収縮し、全体として盛り上がるような曲げ変形が生じたものと考えられる。

以上の解析の総荷重ステップ数は 11,340 であった。

また、計算時間は約 38 時間であり、市販の PC 一台を使用し実用的な計算時間で解析を実施することが可能である。加えて、提案手法による溶接変形の解析結果は、計測結果と良い一致が得られたことから、提案手法を用いることで、実機における溶接変形を高精度に予測できたとと言える。

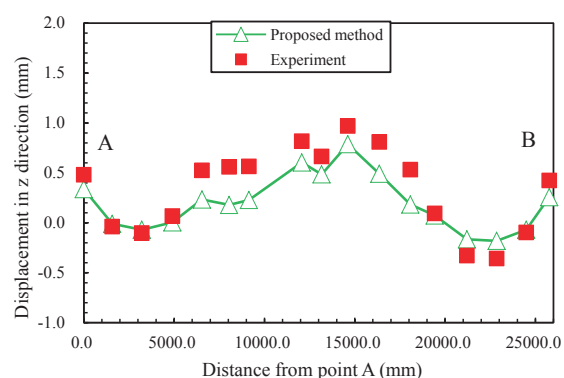


Fig. 18 Comparison of displacement in z direction in side rail model after welding along line A-B

5. 結言

本研究では、実機の溶接における変形の予測に対する理想化陽解法 FEM の適用性を示すために、自動車部品製造時の溶接変形を理想化陽解法 FEM を用いて予測した。解析に際しては、実機の複雑な構造物の解析を効率的に行うために、理想化陽解法 FEM に対して代数マルチグリッド法を導入した手法を提案した。提案手法を用いて種々の構造物の溶接変形の解析を実施した結果、以下の結論が得られた。

- 1) 提案手法を T 継手溶接時の変形解析に適用し、計測結果と解析結果を比較したところ、両者が良好に一致することを確認した。また、参考のために実施した静的陰解法 FEM による解析結果とも良く一致することを示した。
- 2) 自動車を構成する部品の一つであるサイドレールおよびフロントサスペンションメンバーの溶接時の変形の予測に対して提案手法を適用した。本解析においては、実機の製造時の複雑な拘束条件を考慮した。解析結果を計測結果と比較した結果、両者は両モデルにおいて良好に一致することが確認できたことから、提案手法は実機の溶接変形を高精度に予測可能であると言える。
- 3) サイドレールモデルおよびフロントサスペンションメンバーモデルの節点数はそれぞれ、161,071、700,687 であり、それぞれのモデルの解析に要した計算時間は、約 4 時間、約 38 時間であったことから、提案手法を用いることで、市販の PC1 台を用いて、実機の溶接変形を実用的な計算時間で予測できることを確認した。

参考文献

- 1) 上田 幸雄, 山川 武人: 有限要素法による熱弾塑性挙動の解析, 溶接学会誌, Vol.42, No.6 (1973), pp.61-71.
- 2) T. Muraki, J. J. Bryan and K. Masubuchi: Analysis of Thermal Stresses and Metal Movement During Welding

- (Part 1, Analytical Study), Journal of Engineering Materials and Technology, Vol.97, No.1 (1975), pp.81-84.
- 3) E. Friedman: Thermomechanical Analysis of the Welding Process Using the Finite Element Method, Journal of Pressure Vessel Technology, Vol.97, No.3 (1975), pp.206-212.
 - 4) 西川 弘泰, 芹澤 久, 村川 英一: 大規模シミュレーションの実機適用, 溶接学会論文集, Vol.24, No.2 (2006), pp.168-173.
 - 5) J. Goldak, M. Mocanita, V. Aldea, J. Zhou, D. Downey, D. Dorling : Predicting Burn-through When Welding on Pressurized Natural Gas Pipelines, Proceedings of 2000 ASME Pressure Vessels and Piping Conference (2000), pp.23-27.
 - 6) 生島 一樹, 伊藤 真介, 柴原 正和: GPU を用いた並列化理想化陽解法 FEM の開発, 溶接学会論文集, Vol.31, No.1 (2013), pp.23-32.
 - 7) 矢川 元基: 構造工学ハンドブック, 丸善 (2004).
 - 8) 柄谷 和輝, 奥田 洋司, 矢川 元基, アーノルド クレッシュェル, クラウス スチューベン: 大規模有限要素解析における AMG ソルバーの性能評価, Transactions of JSCES, Vol.2001 (2001), p.20010022.
 - 9) K. Stüben: Algebraic Multigrid (AMG): An Introduction with Applications, GMD-Report, Vol.70 (1999), pp.1-127.
 - 10) M. Brezina, R. Falgout, S. Maclachlan, T. Manteuffel, S. Mccomick and J. Ruge: Adaptive algebraic multigrid, SIAM Journal on Scientific Computing, Vol.27, No.4 (2006), pp.1261-1286.
 - 11) P. Vaněk, J. Mandel and M. Brezina: Algebraic Multigrid by Smoothed Aggregation for Second and Fourth Order Elliptic Problems, Computing, Vol.56 (1996), pp.179-196.